УДК 699.841 DOI: 10.37538/0039-2383.2025.5.59.64

Д.Е. БОНДАРЕВ, канд. техн. наук
ООО НПФ «СКАД СОФТ»; e-mail: 89523684328@mail.ru

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗАТУХАНИЯ В СИСТЕМАХ С РАЗНОРОДНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ, ПОДВЕРЖЕННЫХ СЕЙСМИЧЕСКОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ. ЧАСТЬ I: ТЕОРИЯ

Аннотация: В статье представлен сравнительный анализ различных моделей затухания, подверженных сейсмическому воздействию, в системе с разнородным демпфированием. Статья разбита на две части. В первой части описана теоретическая часть. Во второй – практическая. В исследовании принята упрощённая расчётная схема тяжёлого и жёсткого здания, расположенного как на жёстком, так и на мягком грунте, с металлической надстройкой на крыше. Был выполнен динамический анализ с матрицей диссипаций, сформированной по методу Рэлея, методом, основанным на учете демпфирования в материале (реализованным в программном комплексе SCAD++), неклассическим модальным методом, а также методом с заданием пропорционального демпфирования между массами. Показано, что наиболее стабильные результаты как для теста с жёстким, так и для теста с мягким грунтом даёт неклассический модальный метод, а также метод с заданием демпфирования, пропорционального скорости между массами.

Ключевые слова: *матрица диссипаций, разнородное демпфирование, метод Рэлея, материальное демпфирование, SCAD, демпфирование в материале, радиационное демпфирование.*

Введение

В теории сейсмостойкости, как правило, учёт затухания в системе «сооружение–грунт» является сложной и дискуссионной проблемой. Неверная оценка затухания в системе может приводить как к завышенному (консервативному), так и к заниженному результату. Цель данной статьи – динамический линейный анализ системы, для которой различным образом сформированы матрицы диссипаций.

В современных программных конечно-элементных комплексах демпфирование в элементах расчётной схемы можно учитывать явным образом путём ввода одно- или двухузловых демпферов. Принцип работы таких демпферов прост: при наличии относительных скоростей между двумя узлами во время динамического анализа во временной области появляется сила, пропорциональная вязкому коэффициенту *c*. Преимущество такого подхода является в том, что мы можем явно задать демпфирование, соответствующее материалу конечного элемента. Недостатком такого подхода является то, что, как правило, задание двухузловых демпферов между узлами может вызывать определённые трудности в том случае, если в программном комплексе (ПК) этот процесс задания двухузловых демпферов не автоматизирован. В больших схемах, которые состоят из нескольких тысяч конечных элементов, такой подход может быть почти не выполним из-за довольно трудоёмкого процесса задания исходных данных. В таком подходе матрица диссипаций будет не диагональной, а значит, такую задачу можно решить только методом прямого интегрирования, что может занимать значительное время.

Широко известен способ учёта демпфирования путём формирования матрицы диссипаций методом Рэлея. Суть метода Рэлея состоит в следующем: мы формируем матрицу диссипаций в качестве линейной суперпозиции матрицы жёсткости и матрицы масс, отмасштабированных коэффициентами α и β. Коэффициенты подбираются так, чтобы на определённом частотном диапазоне получить заранее известное модальное демпфирование. Данный метод прост и легко реализуем, так как инженеру достаточно выполнить модальный анализ, выбрать значимые для сооружения частоты и задать коэффициенты α и β. К его недостатку относится то, что между выбранными частотами, как правило, кривая затуханий «седловидно» провисает, что приводит к завышенному (консервативному) результату, а за пределами выбранных частот, как правило, наблюдается завышенное демпфирование, приводящее к занижению перемещений, ускорений и усилий в элементах конструкций. Также довольно трудно корректно учесть данным методом демпфирование в системах, состоящих из разнородных материалов (например, бетона, металла, дерева, грунта и т.д.)[1]. Кроме того, не для всех значений α и β мож-

[1] В некоторых программных комплексах существует возможность задавать коэффициенты α и β не для всей конструкции (как в SCAD++), а для отдельных её частей, что частично может решать проблему учёта разнородного демпфирования в системе.

но сформировать матрицу диссипаций. Неверно подобрав коэффициенты α и β, мы можем получить отрицательные значения модального демпфирования на некоторых частотах. Это вызовет ошибку во время расчёта или приведёт к неверным результатам.

Важно отметить, что метод Рэлея хорошо себя зарекомендовал в решении динамических задач разложением по формам колебаний (модальным методом). Одно из требований данного метода: необходимо, чтобы матрица диссипаций была строго диагональной, а это достигается как раз за счёт того, что формы собственных колебаний взаимно ортогональны. Именно по этой причине система уравнений движения распадается на отдельные уравнения по каждой моде. Следует упомянуть один из главных недостатков модального метода: при решении задачи накапливаются значительные погрешности при наличии в системе модального демпфирования больше 20%. Как правило, на задачи, решаемые модальным методом, накладывают ограничения: обычно модальное демпфирование урезают до 20% [1, 5]. «Физичность» метода Рэлея многие исследователи ставят под вопрос, так как, во-первых, только на основе эксперимента можно узнать фактическое затухание на высших модах, во-вторых, затухание в реальности зависит от многих факторов. Поэтому многие авторы (и мы в том числе) считают метод Рэлея искусным математическим приёмом, позволяющим, во-первых, при осторожном и вдумчивом использовании данного метода получить результаты, согласующиеся с экспериментом, во-вторых, решить задачу модальным методом за короткое время[2], не прибегая к большим и долгим вычислениям. Метод Рэлея используют также в задачах, решаемых методом прямого интегрирования.

Существует также метод, основанный на учете демпфирования в материале [6, 7], реализованный в программном комплексе SCAD++. Здесь конечным элементам назначается свой собственный параметр затухания в виде коэффициента потерь (от англ. – loss factor). Матрица диссипаций всей системы представляется в виде сборки матриц жесткостей конечных элементов, умноженных на соответствующие коэффициенты потерь и деленных на частоту калибровки. Последняя вводится для того, чтобы для системы с однородными диссипативными свойствами обеспечить такое же гашение колебаний, как и для линейного осциллятора с соответствующим параметром диссипации в долях от критического и собственной частотой, равной частоте калибровки. Данная матрица диссипаций имеет структуру, совпадающую со структурой матрицы жесткости. Такую систему затруднительно решать модальным методом, поскольку система уравнений движения не распадается на несвязанные уравнения, однако никаких препятствий для применения методов прямого интегрирования не возникает. Достоинством данного метода является то, что можно учитывать разнородное демпфирование в зависимости от типа материала. Например, можно назначать разные параметры затухания для бетона, металла, дерева и грунта в одной расчётной схеме. Основным недостатком данного метода является то, что матрица диссипаций в конечном итоге калибруется некоторой частотой системы (в ПК SCAD++ изначально не было возможности контролировать данный параметр, но эта возможность по предложению автора статьи была добавлена). Матрица диссипаций прямо пропорциональна матрице жёсткости системы, это приводит к тому, что с увеличением частоты увеличивается затухание в системе, что может привести к недооценке вклада высших частот сооружений в конечную динамическую реакцию.

В современной инженерной практике для решения задач с сильно разнородным демпфированием применяют также неклассический модальный метод. Такой алгоритм учёта демпфирования в материале реализован в таких программах, как ABAQUS (SIM-архитектура) и NASTRAN. Данный метод позволяет учесть разнородное демпфирование в материале, сформировав заполненную матрицу диссипаций, которая позволяет для каждой формы колебаний системы в качестве частоты приведения использовать соответствующую собственную частоту, что обеспечивает корректный учет конструкционного демпфирования для всех собственных форм [4].

Модель с тремя степенями свободы

Решим следующую задачу[3]: жёсткое железобетонное здание, на крыше которого есть гибкая металлическая надстройка, опирается на грунт. Грунт имеет жёсткость K_1, параметр затухания ξ_1, масса железобетонной части здания равна $M=M_1+M_2$. Железобетонная часть здания имеет жёсткость K_2, параметр затухания ξ_2, металлическая, гибкая часть здания имеет жёсткость K_3, параметр затухания ξ_3, масса металлической части здания равна M_3 (рисунок 1).

[2] Это верно в случае, если сумма модальных масс достигает 90% при небольшом количестве форм собственных колебаний.

[3] Численные результаты данной модели представлены во второй части статьи.

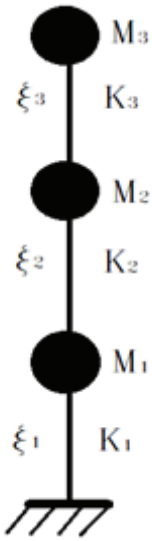

Рисунок 1. Расчётная схема задачи с жёстким грунтом

Данная модель может быть упрощённой расчётной схемой довольно тяжёлого и жёсткого здания (например, АЭС), расположенного на грунте, и имеющего металлическую надстройку на крыше железобетонной части здания.

Решение задачи модальным методом с матрицей диссипаций, сформированной по методу Рэлея

Матрица жёсткости для задачи выше будет иметь следующий вид [1]:

$$[K] = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & -K_3 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Матрица масс будет иметь следующий вид:

$$[M] = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Определим собственные частоты, решая задачу на собственные значения:

$$[K][\Phi] - \lambda[M][\Phi] = 0 \quad (3)$$

Коэффициенты α и β в методе Рэлея определяются по формулам:

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1)}{\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2}, \beta = \frac{2(\xi_2\omega_2 - \xi_1\omega_1)}{\omega_2{}^2 - \omega_1{}^2}. \quad (4)$$

Вектор модального демпфирования вычисляется по формуле [2]:

$$[\xi] = \frac{1}{2}[C][M]^{-1}[\omega]^{-1}. \quad (5)$$

Где $[C]$ – диагональная матрица обобщённых коэффициентов затухания,

$[M]$ – матрица обобщённых масс,

$[\omega]$ – вектор собственных частот системы.

Собственные частоты с учётом затухания вычисляются по следующей формуле:

$$\omega_{D,i} = \omega_i \cdot \sqrt{1 - \xi_i^2}. \quad (6)$$

Решение системы с матрицей диссипацией, основанной на учете демпфирования в материале

Решение нашей задачи с матрицей диссипаций, сформированной по методу, основанному на учете демпфирования материала, модальным методом может вызвать затруднения, так как уравнения не

будут распадаться на несвязанные уравнения движения по каждой моде, что создаст значительные вычислительные трудности. Для решения данной задачи необходимо составить и решить систему дифференциальных связанных друг с другом уравнений.

Матрица диссипаций в методе, основанном на учете демпфирования материала, формируется следующим образом [6, 7]:

$$C = \sum_{e=0}^{Ne} \frac{2\xi_{e,D}}{\omega_n} K_e \ . \tag{7}$$

Где n = 1, 2, 3 – порядковый номер собственной частоты, ω_n – собственная частота всей системы, полученная в результате раскрытия определителя, как это было произведено в предыдущем разделе, $\xi_{e,D} = \xi_e \cdot \sqrt{1-\xi_e^2}$, где ξ_e – параметр затухания в долях от критического для элемента e, K_e – матрица жёсткости элемента. Отметим, что $\xi_{e,D}$ в формуле (7) позволяет учесть изменение собственной частоты системы при наличии элементов с большим демпфированием.

Изобразим расчётную схему (рисунок 2). Составим уравнения равновесия согласно второму закону Ньютона для системы [3]:

$$\begin{cases} m_1\ddot{u}_1 = k_1u_1 + k_2(u_1-u_2) + c_1\dot{u}_1 + c_2(\dot{u}_1-\dot{u}_2) - ma_x(t) \\ m_2\ddot{u}_2 = k_2(u_2-u_1) + k_3(u_2-u_3) + c_2(\dot{u}_2-\dot{u}_1) + c_3(\dot{u}_2-\dot{u}_3) - ma_x(t) \\ m_3\ddot{u}_3 = k_3(u_3-u_2) + c_3(\dot{u}_3-\dot{u}_2) - ma_x(t) \end{cases} \tag{8}$$

где $a_x(t)$ – акселерограмма воздействия, $C_1 = \frac{2\xi_{1,D}K_1}{\omega_n}, C_2 = \frac{2\xi_{2,D}K_2}{\omega_n}, C_3 = \frac{2\xi_{3,D}K_3}{\omega_n}$, ω_n – собственная частота всей системы. m_1, m_2 – масса железобетонной части здания, m_3 – масса металлической части здания.

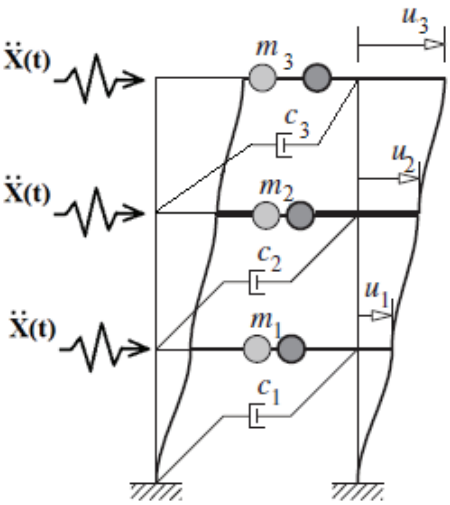

Рисунок 2. Расчётная схема для составления системы дифференциальных уравнений

Решим систему дифференциальных уравнений численным методом в ПК MathCad методом Рунге-Кутта 4-ого порядка. Напомним, что расчёт методом прямого интегрирования с матрицей диссипации, сформированной методом, основанным на учете демпфирования в материале, реализован в программном комплексе SCAD++. Система дифференциальных уравнений (8) соответствует формулировке задачи в относительных координатах, то есть на выходе мы получаем перемещения, скорости и ускорения масс относительно жёсткой заделки (фундамента здания). В сравнительных тестах далее сравнивались абсолютные ускорения, которые получались суммированием акселерограммы воздействия и относительных ускорений степеней свободы.

Матрица диссипаций, сформированная по методу, основанному на учете демпфирования в материале, пропорциональна жёсткости системы. В данном случае затухание будет линейно возрастать с частотой. Если в методе Рэлея мы сами могли отследить зависимость частоты от параметра затухания, то в данном методе этого сделать нельзя. Матрица диссипаций в формуле (7) калибруется собственной частотой системы, которую выбирает пользователь программы самостоятельно. Мы рекомендуем калибровать матрицу диссипаций собственной частотой, на которой наблюдается наибольшая мо-

дальная масса. В случае, если собственная частота, на которую калибруется матрица диссипаций, вызывает преимущественно напряжение элементов с параметром затухания больше 20% от критического, то мы рекомендуем пересчитывать калибровочную частоту по следующей известной из теории колебаний формуле:

$$\omega_{D,n} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi_e^2} \ . \tag{9}$$

Где $\omega_{D,n}$, – собственная частота всей системы с учётом затухания, ξ_e – параметр затухания в долях от критического для элемента.

Решение системы с заданием пропорционального демпфирования между массами

Решим систему уравнений выше (формула 8), только вязкостные коэффициенты зададим следующим образом:

$$c_1 = 2\xi_1\omega_{D,1}m_1, c_2 = 2\xi_2\omega_{D,2}m_2, c_3 = 2\xi_3\omega_{D,3}m_3 \tag{10}$$

Где $\omega_{D,1}, \omega_{D,2}, \omega_{D,3}$ – парциальные частоты с учётом затухания.

Преобразуем формулу (10):

$$c_1 = 2\xi_1\omega_1 m_1\sqrt{1-\xi_1^2}, c_2 = 2\xi_2\omega_2 m_2\sqrt{1-\xi_2^2}, c_3 = 2\xi_3\omega_3 m_3\sqrt{1-\xi_3^2} \tag{11}$$

Где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – парциальные частоты без учёта затухания.

Решение тестового примера неклассическим модальным методом

В современной инженерной практике для решения задач с сильно разнородным демпфированием применяют неклассический модальный метод. Такой алгоритм учёта демпфирования в материале реализован в таких программных комплексах, как ABAQUS (SIM-архитектура) и NASTRAN [4].

Суть метода заключается в следующем: задача решается аналогично классическому модальному методу с тем исключением, что к матрице диссипаций не предъявляется требование ортогональности. Из-за такой матрицы система уравнений движения не распадается на совокупность независимых уравнений, а остаётся связанной. Таким образом, такую задачу необходимо решать методом прямого интегрирования, что требует большего времени на расчёт, чем модальный метод.

Матрица диссипаций в данном методе является составной матрицей конструкционного демпфирования для всей системы. Для её формирования матрица жёсткостей умножается на соответствующий материалу параметр затухания ξ. Составная матрица конструкционного демпфирования будет иметь следующий вид:

$$[G] = \begin{pmatrix} \xi_1 K_1 + \xi_2 K_2 & -\xi_2 K_2 & 0 \\ -\xi_2 K_2 & \xi_2 K_2 + \xi_3 K_3 & -\xi_3 K_3 \\ 0 & -\xi_3 K_3 & -\xi_3 K_3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Для того, чтобы данную матрицу перевести в пространство обобщённых координат, слева её необходимо умножить на транспонированный вектор формы, а справа – на исходный вектор формы. Далее матрицу необходимо слева и справа умножить на диагональную матрицу следующего вида:

$$[\breve{\Omega}] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\omega_3} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Где ω_1, ω_2, и ω_3 являются собственными частотами системы.

В итоге получается матрица конструкционного демпфирования в обобщённых координатах. Такая матрица для каждой формы колебаний системы в качестве частоты приведения позволяет использовать соответствующую собственную частоту.

Формула для определения матрицы конструкционного демпфирования будет иметь следующий вид:

$$[B] = [\breve{\Omega}][\Phi^T][G][\Phi][\breve{\Omega}] \ . \tag{14}$$

Заключение

В первой части статьи были описаны теоретические предпосылки того или иного метода учёта демпфирования. Во второй части статьи представлены результаты анализа трёхмассовой системы как на жёстком, так и на мягком грунте.

Список литературы

1. *Бирбраер А. Н.* Расчет конструкций на сейсмостойкость. СПб.: Наука, 1998. 255 с.
2. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979.
3. *Chopra Anil K.* Dynamics of structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 944 p.
4. *Турилов В.В., Уткин И.А.* Применение метода модальной суперпозиции в неклассической форме для решения задач взаимодействия зданий и сооружений АЭС с грунтовым основанием при сейсмических воздействиях // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2017. № 2. С. 30–35.
5. ASCE 4-16. Seismic analysis of safety related nuclear structures. 2017.
6. *Fialko S., Karpilovskyi V.* Time history analysis formulation in SCAD FEA software. Journal of Measurements in Engineering, 2018. Vol. 6. Iss. 4. Pp. 173–180. DOI: 10.21595/jme.2018.20408.
7. *Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А., Фиалко С.Ю.* SCAD Office. Версия 21: Вычислительный комплекс SCAD++. Изд. 2, поправ., дополн. Издательство СКАД СОФТ. Издательство Ассоциации строительных вузов. Москва, 2018.

COMPARATIVE ANALYSIS OF VARIOUS ATTENUATION MODELS IN SYSTEMS WITH HETEROGENEOUS DAMPING EXPOSED TO SEISMIC EFFECTS. PART I: THEORY

D.E. Bondarev, CKTI-VIBROSEISM LTD; e-mail: 89523684328@mail.ru

Abstract. *The article presents a comparative analysis of various seismic-affected attenuation models in a system with heterogeneous damping. The article is divided into two parts. The first part describes the theoretical part. The second one is practical. The study uses a simplified design scheme of a heavy and rigid building located on both hard and soft ground, with a metal superstructure on the roof. A dynamic analysis was performed with a dissipation matrix formed using the Rayleigh method, a method based on the consideration of damping in the material (implemented in the SCAD++ software package), a non-classical modal method, as well as a method with the assignment of proportional damping between masses. It is shown that the most stable results for both the hard and soft ground test are obtained by the nonclassical modal method, as well as the method with a damping proportional to the velocity between the masses.*

Keywords: *dissipation matrix, heterogeneous damping, Rayleigh's method, material damping, SCAD, damping in a material, radiation damping.*

References

1. *Birbraer A.N.* Calculation of structures for earthquake resistance. St. Petersburg: Nauka Publ., 1998. 255 p. (in Russian).
2. *Clough R., Penzien J.* Dynamics of structures. Moscow: Stroyizdat, 1979 (in Russian).
3. *Chopra Anil K.* Dynamics of structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 944 p.
4. *Turilov V.V., Utkin I.A.* Application of the modal superposition method in a non-classical form to solve problems of interaction of buildings and structures of nuclear power plants with the ground base under seismic influences. Earthquake-resistant construction. Safety of structures. 2017. No. 2. Pp. 30–35 (in Russian).
5. ASCE 4-16. Seismic analysis of safety related nuclear structures. 2017 (in Russian).
6. *Fialko S., Karpilovskyi V.* Time history analysis formulation in SCAD FEA software. Journal of Measurements in Engineering, 2018. Vol. 6. Iss. 4. Pp. 173–180. DOI: 10.21595/jme.2018.20408.
7. *Karpilovsky V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A., Fialko S.Yu.* SCAD Office. Version 21: Computing complex SCAD++. Ed. 2, amendment, supplement. SCAD SOFT Publishing House. Publishing House of the Association of Construction Universities. Moscow, 2018 (in Russian).

Для цитирования: Бондарев Д.Е. Сравнительный анализ различных моделей затухания в системах с разнородным демпфированием, подверженных сейсмическому воздействию. Часть I: теория. Строительная механика и расчет сооружений. 2025. № 5. С. 59–64.
DOI: 10.37538/0039-2383.2025.5.59.64

For citation: Bondarev D.E. Comparative analysis of various attenuation models in systems with heterogeneous damping exposed to seismic effects. Part I: theory. Structural mechanics and analysis of constructions. 2025. No. 5. Pp. 59–64 (in Russian).
DOI: 10.37538/0039-2383.2025.5.59.64